

多様な考え方を生かす数学の授業

「三平方の定理」の指導を通して

岡山大学教育学部附属中学校 教諭 大月一泰

1 はじめに

新学習指導要領の完全実施を来年度に控え、私たちは指導内容の3割カット、授業時間数削減の中で、新しい数学の授業のあり方について模索している。

これからの時代は、多少の知識や技術を身につけただけでは、激しい変化が予想される社会に適切に対応していくことはできない。だからこそ、いかなる変化が起ころうと、どんな社会になろうとたくましくよりよく生きていく力が必要になる。

当然、このような力の育成のためには与えられたことや教えられたことをただ身につけるだけの知識偏重の学習ではなく、進んで課題を見つけ、それらを追求し、解決していくという主体的な学習が必要になってくる。

また、様々な調査結果で、数学離れや数学嫌いが公表されるたびに、マスコミ等でもそのことが大きく取り上げられている。裏を返せば数学教育に対する期待があるわけで、生徒に数学の「楽しさ」「すばらしさ」を実感させる指導を通して答えていきたい。

2 目標

「三平方の定理」の単元の指導を通して、生徒の多様な考え方を生かす数学の授業のあり方を提案したい。

3 三平方の定理

「ピタゴラスの定理」とも呼ばれ、図形的な美しさや単純でありながら奥の深い式に、数学のすばらしさを感じさせる定理である。卒業を数ヵ月後に控えた3年生が学習する内容として、また、義務教育の集大成という観点から既習の平方根や二次方程式等とも深く関わっている内容として、生徒に効力感を実感させることができるものである。

4 多様な考え方を生かすこと

多様な考え方を生かす授業は、生徒一人一人を認め集団の中で個性を生かす教育に他ならない。

多様な考え方を表現できることは、数学の独自性だと考えられる。今回の研究対象である三平方の定理の証明でさえ100以上の証明が知られている。それぞれの考え方のよさが評価されているからである。つまり、数学は結果を導き出す過程が重視される教科なのである。そして、その過程にこそ、生徒の考え方、個性が生かされるのである。生徒が自ら学び、自ら考える能力・態度の育成という今日的課題の糸口がある。他人から知識を与えられるのではなく、主体的な活動を通して獲得していくからである。

多様な考え方を生かすためには、日頃の学習指導が自然な形で生かされなければならないと考える。「他にはないだろうか？」等と生徒を揺さぶる活動をおろそかにはできない。一人一人の考え方が取り上げられ、生かされる授業を心掛けなければならない。また、多様な考え方が発揮されるためには、生徒が問題解決のための様々な方策を持つていなければならない。意図的に単元を構成する必要がある。今回は、特に導入段階でパズル的な課題、オープンアプローチ、オープンエンドの課題、単元の最後に課題学習として「ヒポクラテスの三日月」の授業を取り入れた。

また、小集団や学級集団での話し合い活動を積極的に取り入れ、生徒が互いの考えを発表したり、説明しあったりする活動を通して、生徒が理解を一層深め、確かな知識や概念を獲得できるようにした。

5 生徒の実態

アンケート等からも、他の領域に比べて図形領域が好きな生徒が多い。しかし、平面図形より空間図形を苦手としている生徒が多いので、具体物を使いながら空間での位置関係等を捉えやすく指導したい。また、合同や相似の証明に興味・関心が高く、自分なりに筋道をたて表現し、考え方の正当性を議論しあう場面もあった。これまでに培った多様な見方・考え方を大切にしてきた指導が少しずつ形となって表れている。

6 指導計画

「三平方の定理」の単元の指導では、できるだけ生徒の多様な考え方を生かすことができる指導計画を立てた。生徒の多様な考え方を生かすために、できるだけ生徒から導き出し、生徒自らが考えた図形について考察を進めていきたい。その際には、それぞれの考え方を深めるために、小集団で互いの考え方を説明しあったり、比較・検討したり、まとめたりする活動を取り入れた。

時数	主な学習内容
第1時	直角三角形で、直角をはさむ2辺上にある小さい2つの正方形から斜辺上にある正方形を合成する。
第2時	方眼紙にさまざまな直角三角形をかき、 $P+R=Q$ の関係を確かめる。
第3,4時	三平方の定理のいろいろな証明を前時の考え方を利用した証明を考えたり、図書館やインターネットを活用して他の証明を調べたりする。
第5時	三平方の定理の逆の証明を見つけたり、間接証明があることを知ったりする。
第6,7時	三平方の定理の平面図形への応用では、三角形の辺の長さや高さ、面積を求める。一定の規則のもとに、次々と作図をして辺の長さを求める。
第8,9時	三平方の定理の空間図形への応用では、空間図形の線分や展開図との関連で長さを求める。
第10,11時	課題学習として「ヒポクラテスの三日月」と発展課題

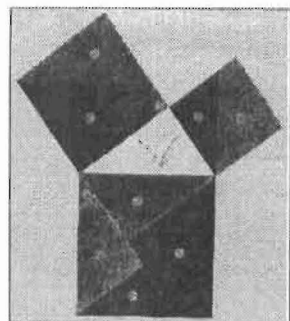
7 「ヒポクラテスの三日月」の発展課題

課題学習の発展課題として使った課題(図6)は、文部科学省の根本博先生が研修講座等でよく紹介された課題である。その時、私が感動したことを、生徒にも実感させることができないだろうかと考えて実践したものである。また、今回は3年前にこの課題を実践した際の反省に基づき、トピック的に扱うのではなく、単元を通して「多様な考え方を生かすこと」を重点に再構築した。この「ヒポクラテスの三日月」では、単に面積を求める活動だけでなく、導いた値が何を表しているか等を考察していく活動も重視している。

8 授業の様子

実践1

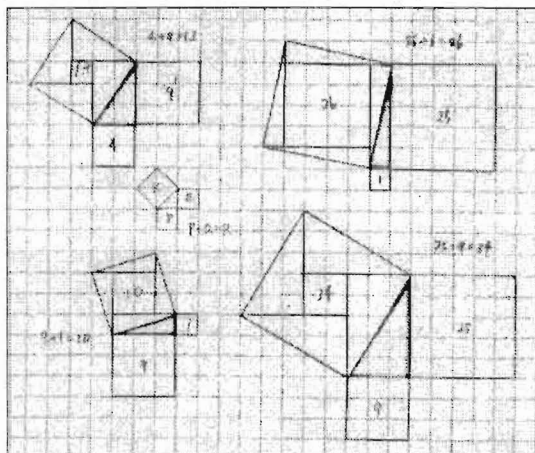
第1時では、(図1)のように生徒が扱い易い大きさに拡大したものを2枚配布し、直角をはさむ2辺をそれぞれ1辺とする正方形を切り取って、斜辺のところの正方形にあてはめる活動をし、切り取った図形を自由に動かして並べる活動を中心として、単元の導入とした。見ての通り、大きい正方形にきちんと入れば正解となる。答えは一通りではなく、早くできた生徒には他の並べ方を考えさせた。そして小集団で、確認しあった。パズルのような不思議さに「どうして？」という声があがった。



(図1 生徒ノートから)

実践2

第2時では、(図2)のように方眼紙にいろいろな直角三角形をかき、それぞれを1辺とする正方形の面積を調べる活動を行った。ここでは、方眼紙にかく直角三角形もさまざまである。そして、面積を確認する際に、斜面上の正方形の面積を求める方法も分割して求めたり、外に正方形をかいて、そこからひいて求めたりするなど多様な求め方が出てくる。このことは、第3、4時の「三平方の定理の証明」につながる。



(図2 生徒ワークシートから)

実践3

ここでは、課題学習の2時間の概要を紹介する。

教師：「正方形の面積にはどんな関係がありましたか。」

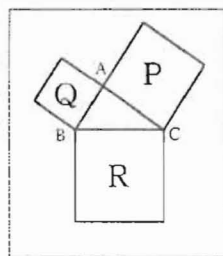
生徒：「 $P+Q=R$ です。」

教師：「正方形以外の図形ではどうなるだろう。」

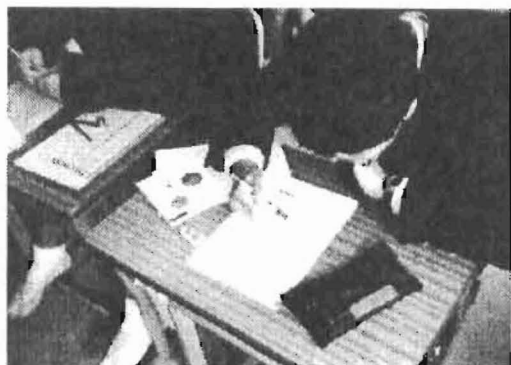
生徒：「成り立つ。」「成り立たない。」「図形によって違う。」

教師：「それでは、いろいろかいてやってみよう。」

生徒の多くは正三角形をかき始めた。



(図3)



(写真1 自己追求している様子)

教師：「どんな図形について、挑戦しているのか発表しよう。」

生徒：「正三角形、正六角形、長方形、直角三角形、二等辺三角形、半円、ひし形……。」

教師は、図形の名前を板書していく。それぞれの面積を求めて、関係を確認できたころから、できた生徒には他の図形に挑戦するように促した。

生徒：「あわない?」($P+Q=R$ にならない。)

取り上げて全体の課題にする。

教師：「なぜ、できるときとできないときがあるのだろうか。」

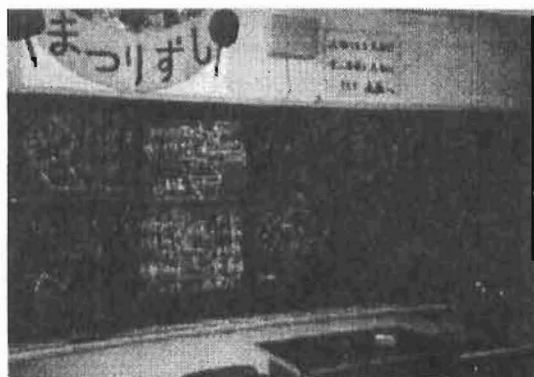


(写真2 小グループで話し合いをしている様子)

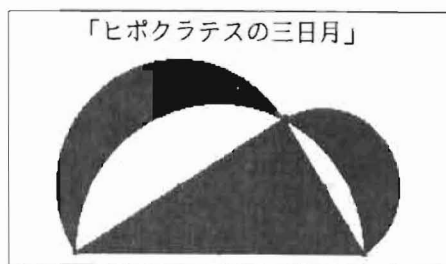
直角三角形の各辺を1辺とする正三角形は必ず相似になるが、二等辺三角形や長方形は相似になるとは限らない。無意識に縦と横の辺の長さの比が1:2のような相似な長方形をかいていた生徒もいたが、ここで、直角三角形の各辺を1辺とする図形が、相似でなければならないことを確認し合うことができた。

次に、各班で追求プリントを読みあったり、説明しあったりする。

そして発表のために小黑板にまとめて、黒板に掲示する。各班の説明の後、相似であれば、どんな図形であっても $P+Q=R$ の関係があることをまとめた。(第1時終了)



(写真3 直角三角形のまわりに、いろいろな図形が書かれた小黑板)



教師：「前の時間にも同じような図があったね。」

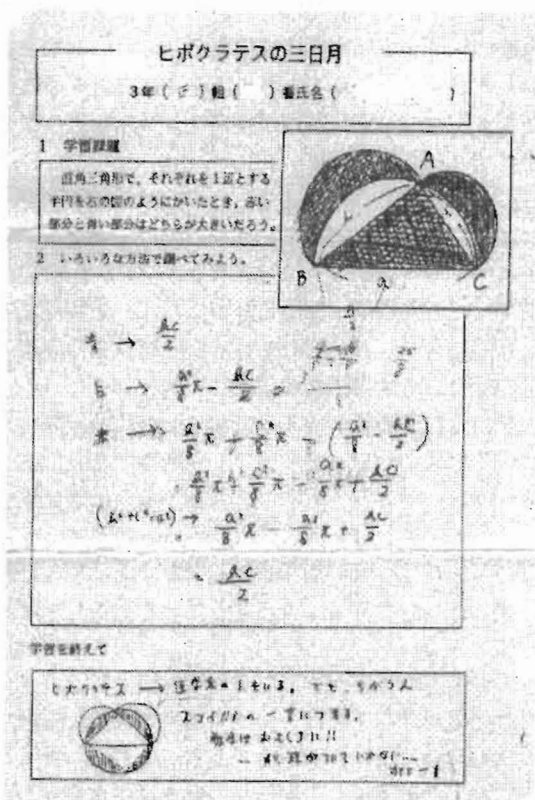
斜辺のところだけ反対側に半円をかくと、2つ三日月ができるでしょう。三日月を赤、直角三角形を青で塗りましょう。

さて、赤い部分と青い部分とでは、どちらが大きだろうか。赤の人?青の人?等しい人?」(生徒に予想させる。)

生徒の反応は、赤が3分の1、青が数人、等しいが半数程度であった。

教師：「それでは、実際に調べてみよう。」

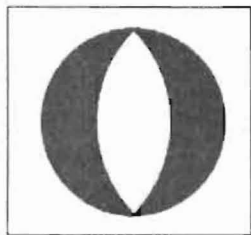
直角二等辺三角形をひいたものを2倍して白い部分の面積を求め、円から引いて a^2 を導く方法が多かったが、複雑な計算のため途中で計算を間違った生徒も多かった。



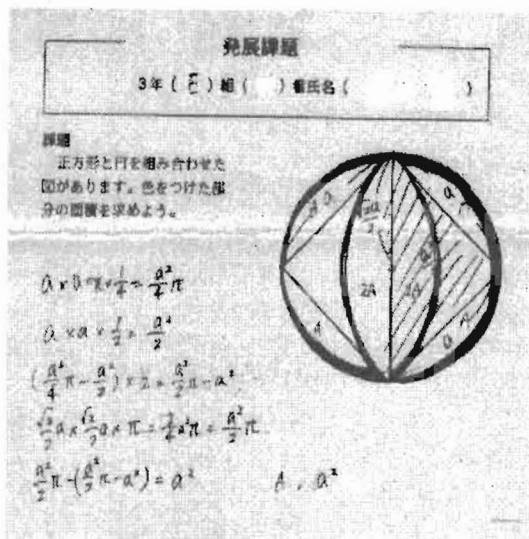
(図5) 生徒の追求プリント1

多くの生徒は、小さい2つの半円と直角三角形を加えたものから大きい半円をひいて求めていた。また、上の(図5)にあるように、白い部分を求めて、小さい2つの半円からひいた生徒もいた。計算で確認した後、「計算しなくてもよい方法はないか。」と質問した。そこで、前時の直角三角形であれば、どんな図形であっても $P+Q=R$ であることを使った考え方(学習を終えての欄)が出てきた。最後に、2つの三日月の面積と直角三角形の面積が等しいことを確認した。

発展課題として、(図6)のように正方形と円が組み合わさっている図で、色をつけた部分の面積を求める課題を出した。多くの生徒は(図7)にあるように、半径が a の扇形から等しい辺が a の



(図6) 発展課題



(図7) 生徒の追求プリント2

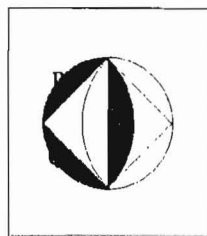
教師:「面積が a^2 となったが、何の面積と等しいか?」

生徒:「中の正方形」

教師:「他の求め方はないだろうか?」

しばらく、時間を取った。そうして、出てきたのが $P+Q=R$ の考え方を使うものである。

(図8)で色をつけた図形は扇形から直角二等辺三角形を取り除いたもので、相似だから、 $P+Q=R$ の関係が成り立つのである。つまり、右側の三日月の面積(白の部分)と左側の正方形の面積の半分(白の直角二等辺三角形の部分)が等しいから、三日月2つ分の面積と正方形の面積が等しくなるという考え方である。他にも、授業の前半で学習した関係がなんとなく使えそうだけどうまく説明できないという意見も発表された。



(図8)

そこで、OHPを使って、次の(図9)のように2枚のシートを動かしながら、面積の関係を説明した。生徒からは驚きの声が出た。最終的に前時で学習した「ヒポクラテスの三日月」の考え方が適応されているからである。まさに、2つの三日月

月の面積と直角三角形の面積（ここでは正方形の面積）が等しいことが説明されたのである。



(図9)

2時間の課題学習を終えて、生徒の感想には次のようなことが多く書かれてあった。「今日は新しい発見ばかりでした。感動……？！とてもおもしろかったです。」「はじめは、むちゃな話だと思ったけど、いろいろやっているうちに、わかってきておもしろくなった。奥が深いと思った。」発展課題で、図形そのものを移動させる発想は、生徒にとって新しい出会いであり、驚きであったようである。（作図ツールで頂点を動かすのとは違うという意味）説明に使ったTPシートも簡単に作ることができる。順に計算しても求めることができるが、多様な考え方を基に、考えた過程を振り返る活動をするによって、どのように考えて求めるのがより適切か、また既習事項で使える考え方はないだろうかといったことを意識しながら問題解決ができるようになるのではなかろうか。

今回はヒポクラテスを扱ったが、3年生ではエラトステネス、アルキメデス、ピタゴラスなど人物に焦点を当て、数学史を交えて指導した。ノートに数学関連の年表を貼り付けて、折に触れて指導内容に結びつけた。

授業後、ヒポクラテスについて調べた生徒から、「ヒポクラテスは医学の父」という話を聞いた。確かに、インターネットで検索すると医学の父としてのヒポクラテス（医学を志す者にとっては、あまりにも有名）ばかりである。同じ頃の人物であるが、別人である。

9 まとめと今後の課題

(写真3)の上方にクラスの学級目標「まつりずし」とあるのが写っている。「祭り寿司」といえば岡山の名物である。多様な考え方を生かし、生徒一人一人を集団の中で生かす授業は、まさに「まつりずし」に他ならない。瀬戸内の素材が生かされた料理は、学級という集団の中で各自の考えを発表し互いに認め合う授業そのものである。

多様な考え方を生かすためには、今回の実践で

取り入れたように、解決の過程が様々な課題や解決の結果が様々な課題が有効である。また、授業形態からは小集団や学級集団での話し合い活動を取り入れることが重要である。根底には、前述の一人一人が認められ個性が発揮できる学級作りが必要である。

ここで注意しなければならないのは、この形が授業としてベストであるという形の提案ではなく、忘れてはならないことは、生徒が本当に問題意識を持ったり、興味・関心に基づいたりしていることから出発し、深められているかという生徒の立場になった考え方である。

また、授業を楽しくするためにゲームやパズルを使えばよいという考え方にも気をつけたい。生徒が楽しいのはゲームやパズルをすることが、単に面白い、楽しければよいということに留まってはいただろうか。活動を通して数学を学ぶことの楽しさが味わえるようになることを重視しなければならない。

同じようなことが、ただ具体物を授業に使って操作的な活動をすれば、生徒も活発になり、数学的活動になるという考え方である。これも、具体的な操作活動により内面的な活動を活性化させ、また、内面的な活動により具体的な活動を誘発させるなどの双方向性がある初めて数学的な活動と言えると考えたい。

今回の授業実践では、単なるパズルや操作的な活動に終わらないよう留意したが、検証はできていない。

これからも、日々の授業実践を通して、生徒のよりよい変容をめざして、努力していきたい。

参考文献等

中学校学習指導要領解説—数学編—

第32回数学教育論文発表会誌 p 533, 534